



TITLE:

軟らかい発振と硬い発振 (力学系の理論とその応用)

AUTHOR(S):

倉光, 正己; 高瀬, 冬人

CITATION:

倉光, 正己 ...[et al]. 軟らかい発振と硬い発振 (力学系の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1981, 443: 28-46

ISSUE DATE:

1981-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102867>

RIGHT:

軟らかい発振と硬い発振

京都大学工学部 倉光正己 高瀬冬人

1. まえがき

図1のような負性抵抗発振器を考える。回路の非線形抵抗 (N.R) が図2あるいは図3に示すような特性を持つとき、系を記述する微分方程式は、それぞれ次式となる。

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \mu(1 - \beta x^2 + x^4)\dot{x} + x = 0 \quad (2)$$

(1)式は van der Pol の方程式としてよく知られ、この系では初期値に依らず一定振幅の振動が自励する〔図4〕。(2)式では、原点(無発振状態)が安定であり、小さな初期値では発振しないが、ある程度以上大きい初期値を与えると発振する〔図5〕。これら二種類の発振は、それぞれ「軟らかい発振」、
「硬い発振」と呼ばれている^[1]。さて、多自由度発振器、例之

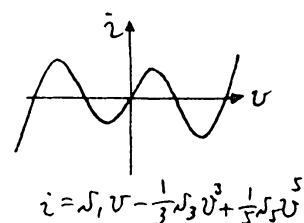
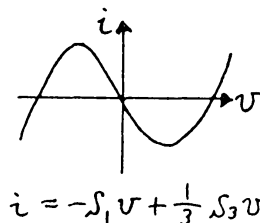
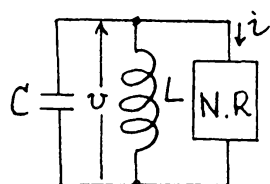


図1. 負性抵抗発振器 図2. 3次特性(軟特性) 図3. 5次特性(硬特性)

ば、図6のような梯子状に結合された発振器群に生じる振動は、上述の二種類の非線形抵抗の特性の違いによって、どのように異なってくるのであろうか。

多自由度発振器に関する研究は、van der Pol以来多くの研究があり、具体的な回路に対応して興味深い様々な現象が知られているが、^[2] これらの諸現象を統一的に説明できる一般的原理は未だ見出されていないのが現状である。系の非線形特性の違いによる現象の変化を明らかにすることは、この問題を考えるひとつの手掛りとなるものと考えられる。

筆者等は、先にパラメータ μ が小さい (almost linear and almost lossless) 系における非同期多重モード振動の解析法として、系全体の損失(散逸関数)の時間平均である平均ポテンシャル関数を用いる方法を提案し、軟らかい発振特性をもつ多自由度発振器の解析を行なった。^{[3]-[6]} 本報告では、硬い発振特性をもつ多自由度発振器の解析を行ない、軟らかい発振器の結果との比較を試みる。^{[7]-[10]}

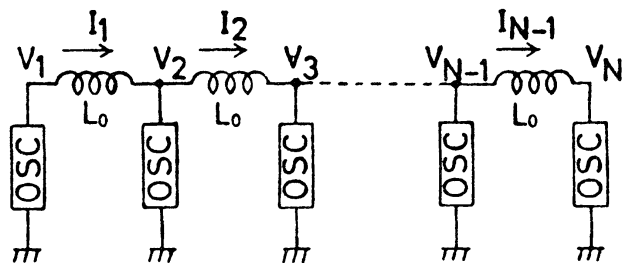
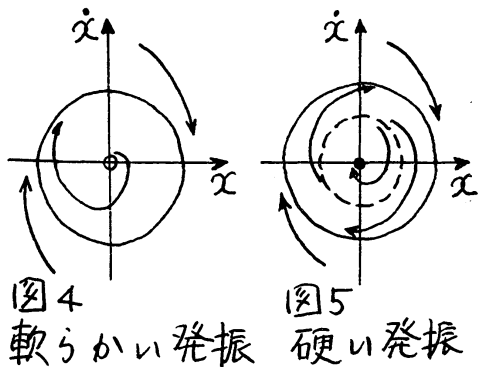


図6 梯子状発振器

2. 硬い発振特性をもつ抵抗素子の性質

2.1 5次式で表わされる硬特性

平均ポテンシャルは回路内の全抵抗で失われる平均的損失に対応する量であるから、^[3]まず、多数の周波数成分から成る電圧が加わったとき、一個の非線形抵抗（能動素子）がどのように振舞うかを知ることが重要である。そのため、図7に示す多数の共振回路と一個の硬特性（5次式）をもつ能動素子で構成された発振器を考える。^{[7][10]}ただし、小さな非線形抵抗の電圧電流特性 $g(v)$ は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} i = g(v) &= g_1 v - g_3 v^3 + g_5 v^5 \\ &= \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} g_1 \left(x - \frac{\beta}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

($g_1, g_3, g_5 > 0$)

ただし、 x, β は次式で与えられる。

$$v = \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} x, \quad \beta = \frac{3g_3}{\sqrt{5g_1g_5}} \quad (4)$$

パラメータ β は、非線形特性の1次および5次の項（原点付近および飽和領域の正抵抗）を固定したときの3次の項（負性抵抗）の大きさを示す。図7の回路の平均ポテンシャルは次のように求められる。^{[3][6]}まず、この系の電圧

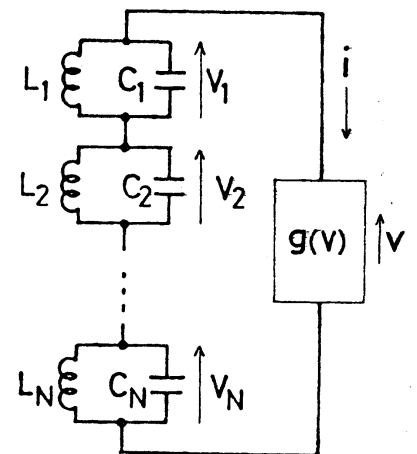


図7. 多共振回路発振器

ポテンシャルは次式で与えられる。

$$G(v) = \int g(v) dv = \sqrt{g_1^3/5g_5} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\beta}{12} x^4 + \frac{x^6}{30} \right) \quad (5)$$

一方、この系の generating solution, すなわち、微小抵抗を取りはずした回路の一般解は次式のように書ける。

$$v = \sum_{k=1}^N v_k = \sum_{k=1}^N \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} x_k = \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} \sum_{k=1}^N r_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \quad (6)$$

ω_k は各共振回路の共振周波数である。(6)式を(5)式に代入し、平均化することにより、平均ポテンシャル \bar{U} が得られる。ただし、 ω_k の間に簡単な関係の成りたたない非共振の場合を考える。すなわち

$$\begin{aligned} \bar{U}(r_1, r_2, \dots, r_N) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G\left(\sum_{k=1}^N v_k\right) dt \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} G\left(\sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} \sum_{k=1}^N r_k \sin \varphi_k\right) d\varphi_1 \dots d\varphi_N \\ &= \sqrt{\frac{g_1^3}{80g_5}} \left[\sum_{m=1}^N R_m - \frac{\beta}{8} \left\{ \sum_{m=1}^N R_m^2 + 4 \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{l=m+1}^N R_m R_l \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \left\{ \sum_{m=1}^N R_m^3 + 9 \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^N R_m^2 R_l + 36 \sum_{1 \leq m < l < k \leq N} R_m R_l R_k \right\} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

ただし、 $R_m \equiv r_m^2$ 。この系の安定な定常状態は、 $R_m \geq 0$ ($m=1, \dots, N$) の制約の下でのポテンシャル \bar{U} の極小点に対応する。^{[3]-[6]}

さて、 $R^* = (R_1^*, \dots, R_N^*)$ は次式が成立するとき、 \bar{U} の極小問題の解となる。ただし、励起された(振幅がゼロでない)モードの添字の集合を $E \subset \{1, 2, \dots, N\}$ と書く。

(I) 平衡条件 (励起されたモードの振幅を定める式)

$$\left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial R_e} \right|_{R=R^*} = 0 \quad (R_e > 0), \quad (e \in E) \quad (8)$$

(II) 抑制条件 (振幅ゼロのモードが励起しない条件)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R_d} \right|_{R=R^*} > 0 \quad (R_d = 0), (d \notin E) \quad (9)$$

(III) 正定値条件 (励起されたモードが U を極小とする条件)

U のヘシアン行列 $H_{ij} = \partial^2 U / \partial R_i \partial R_j$ のうち, E に対応する行と列を取出した正方行列が正定値である。

n 個 ($0 \leq n \leq N$) のモードが励起される n 重モード振動の振幅は (8) 式で決まるが, 図7の回路では, すべてのモード成分の振幅が等しい等振幅 n 重モード振動しか安定となり得ないことが示される (証明略)^[10] (8) 式より求めた等振幅 n 重モード振動の振幅は次式となる。

$$R \equiv R_1 = R_2 = \cdots = R_n = [(2n-1)\beta + \sqrt{D}] / (6n^2 - 9n + 4) \quad (10)$$

$$D = (2n-1)^2 \beta^2 - 8(6n^2 - 9n + 4)$$

$D > 0$, および (9) 式, 正定値条件を考慮すると, 等振幅 n 重モード振動が安定に生じるパラメータ β の範囲は次のようになる。

$$n=1 \quad \beta^2 > 8$$

$$n \geq 2 \quad \frac{8(3n-1)^2}{6n^2-13n+4} > \beta^2 > \frac{8(6n^2-9n+4)}{(2n-1)^2} \quad (11)$$

3次特性 (軟発振特性) では単一モード振動しか生じなかったのに比べ, 多数の多重モード振動が生じ得ることがわかる。

(11) 式から求めた n 重モード振動の生じる β の範囲を図8に示す。図より, 負性抵抗分 (β) がある程度 ($\sqrt{8}$) 以上の大きさ

にならないと発振しないことがわかる。また、 β が十分大きくなると、3次特性の場合と同様に単一モード振動しか生じなくなる。(ただし、3次特性の場合と違って、無発振状態も安定である。) これは β が大きくなると原点付近の正抵抗の部分は狭くなり、全体的には負性抵抗部分と飽和の正抵抗部分から成る軟特性と大差がなくなるためである。結局、適度の大きさ ($3 < \beta < 4$) の範囲で β の値を適当に設定すると、任意の n 重モード振動 ($n \geq 2$) が安定となりうるようになる。例えば $3.15 < \beta < 3.24$ では、無発振状態、単一モード、2重モードおよび3重モード振動がすべて安定であって、初期値により、いずれかの状態におちつく。

n の増加と共に、 n 重モード振動の生じる β の範囲は狭くなり、 $n \rightarrow \infty$ では $\beta \rightarrow \sqrt{12}$ となる。(この状態の物理的意味の検討は今後の課題である。) n 重モード振動の発生領域は $(n-1)$ 重モード振動の発生領域とは必ずしも重ならないが、単一モード振動の発生領域内には常に含まれる。

結局、(3) 式 of 非線形抵抗が最も硬特性らしい特徴的な現象を示すのは、その特性曲線の形状が、正抵抗を示

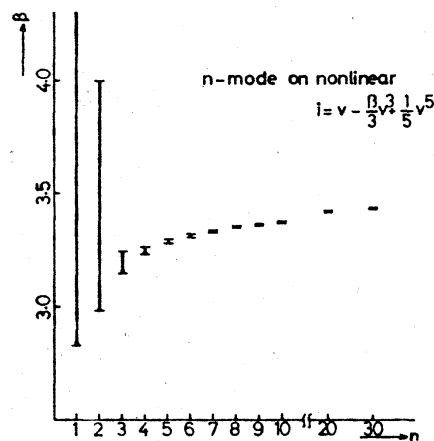


図8. n 重モード振動の生じる β の範囲

す領域と負抵抗を示す領域とがほぼ同程度の大きさとなるような場合であって、直観的な理解が正当なことがわかる。

演算増幅器(OPアンプ)を用いて硬発振特性の非線形抵抗を作成し、図7のような3自由度発振器を構成し、3重モードまでのすべての振動が生じることを確かめた。

2.2 平均ポテンシャルの等高線図

平均ポテンシャル法の特徴は、その値が大きいのところから小さい所へ現象が変化することを示した点にある。^{[3][6]}従って、平均ポテンシャルの等高線図を描けば、現象の変化、初期値領域等を知ることができる。そこで、系を2自由度の場合に限り、(7)式で与えられる平均ポテンシャルの等高線図を図9に示す。図中の数字は平均ポテンシャルの値を示す。 β の変化に伴う「地形」の変化が良く理解できる。

2.3 7次式で表わされる硬特性

2.1節では、図3のような硬発振特性を、最も簡単に5次多項式で表わした場合を考察したが、この特性を別の形で近似したとき、どのような違いが現われるであろうか。このことを調べるため、次のような7次多項式の特性を考える。

$$i = g(v) = g_1 v - g_3 v^3 - g_5 v^5 + g_7 v^7$$

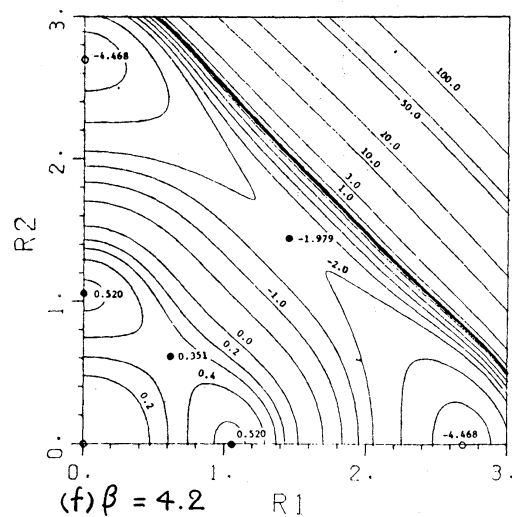
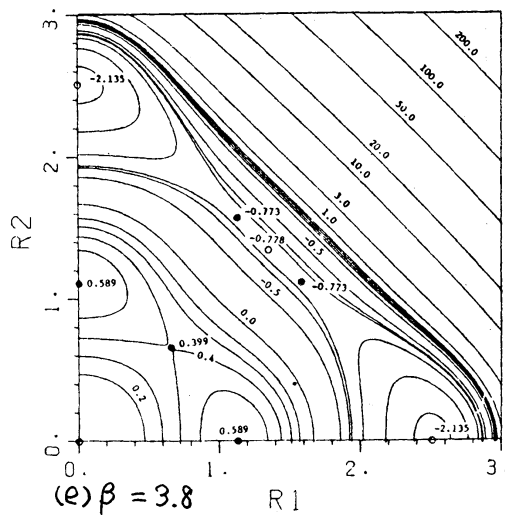
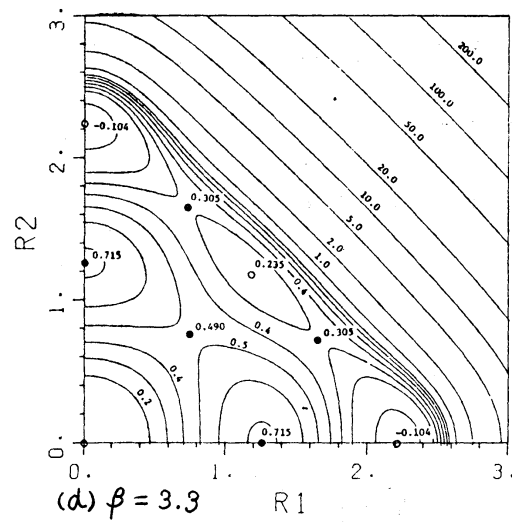
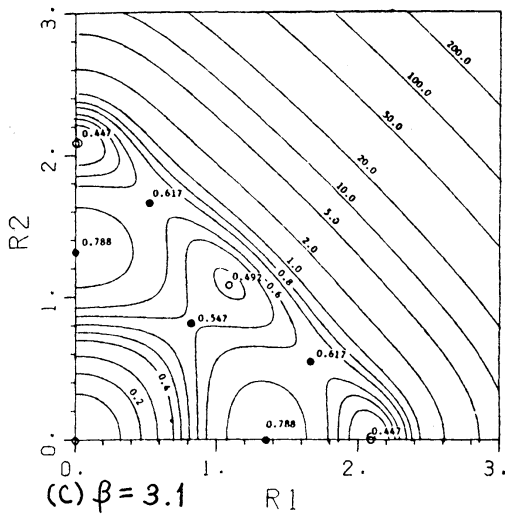
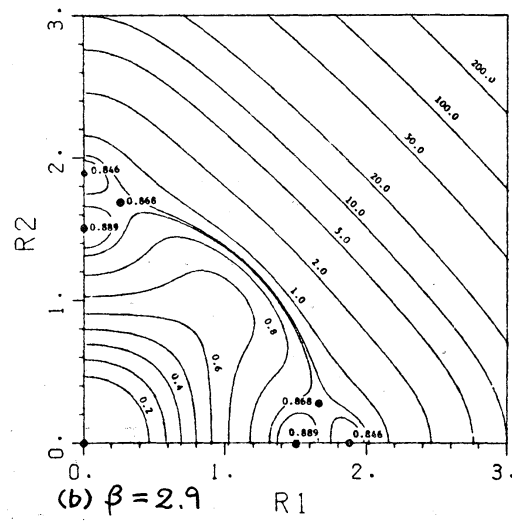
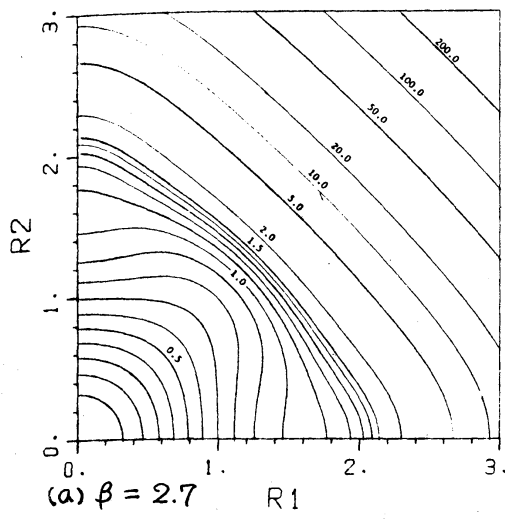


図9 平均ポテンシャルの等高線図 { ○: 極小点 (安定平衡点) }
 { ●: 鞍点, 極大点 (不安定平衡点) }

$$= \sqrt[6]{\frac{g_1}{7g_7}} g_1 \left(x - \frac{\beta_3}{3} x^3 - \frac{\beta_5}{5} x^5 + \frac{1}{7} x^7 \right) \quad (12)$$

ただし, $g_1, g_3, g_5, g_7 > 0$

$$v = \sqrt[6]{g_1/7g_7} x, \quad (13)$$

$$\beta_3 = 3g_3/\sqrt[3]{7g_1^2g_7}, \quad \beta_5 = 5g_5/\sqrt[3]{49g_1g_7^2}$$

2.1 節と同様にして, 安定な n 重モード振動 (等振幅) が生じるパラメータ β の範囲を求めることができる。簡単のため, $\beta_5 = 0$ あるいは $\beta_3 = 0$ の場合の計算結果を図 10 に示す。

図 8 と比較すると, 定性的には良く似た図となっており, 2.1 節で述べた結果は近似の程度にかかわらず, 硬特注一般に成り立つものと思われる。

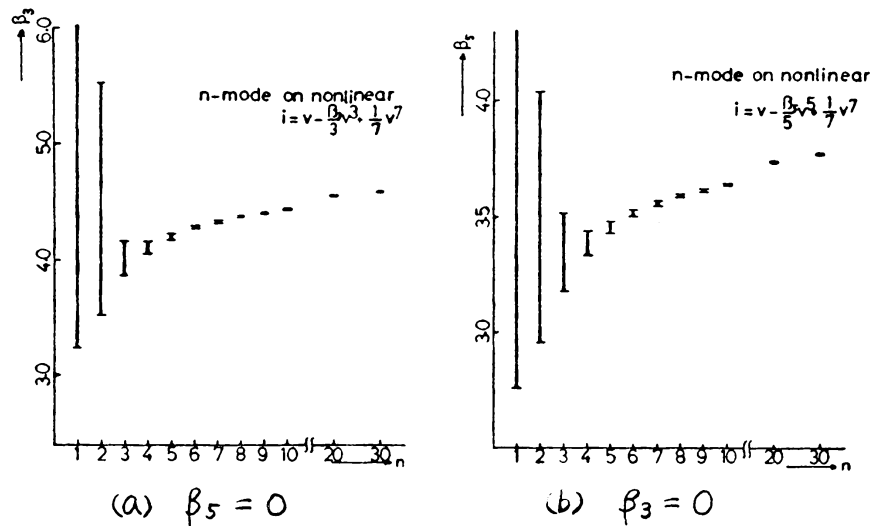


図 10 n 重モード振動の生じるパラメータ範囲 (7 次式)

3. 5次特性の非線形抵抗をもつ梯子状発振器

3.1 平均ポテンシャル

筆者等は先に3次特性(軟特性)をもつ発振器を図6のように結合した梯子状発振器を解析し、高々2個の単モード振動と $[\frac{N-1}{2}]$ 組の2重モード振動が安定に生じ得ることを示した。これは一個の3次特性が単モード振動に対してしか極小となり得ないことの反映である。

一個の5次特性素子の平均ポテンシャルは2.1節で見たように、無発振状態や種々の多重モード振動でも極小となるから、5次特性の非線形抵抗をもつ梯子状発振器では、3次特性の場合と比べ多くの発振状態が安定となることが予想される。(以下では非線形抵抗の特性がすべて等しい場合を考える。)

さて、図6の梯子状発振器の平均ポテンシャルを求める。一個の抵抗素子の電圧ポテンシャル $G_k(v)$ は(5)式で与えられる。一対、抵抗を取去った保存系においてコンデンサの端子電圧 v_k (系の一般解)は次式で表わされる。

$$v_k = \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} x_k = \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} \sum_{m=1}^N P_{mk} r_m \cos(\omega_m t + \theta_m) \quad (14)$$

$$\text{ただし} \quad P_{mk} = \begin{cases} 1 & (m=1) \\ \sqrt{2} \cos \frac{(2k-1)(m-1)}{2N} \pi & (m=2, \dots, N) \end{cases} \quad (15)$$

$$\omega_m^2 = (1 + \alpha - 2\alpha \cos \frac{m-1}{N} \pi) \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{1}{L_0 C}, \quad \alpha = \frac{L}{L+L_0}$$

$\omega_m (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N)$ はモード周波数であり, P_{mk} はこのモードのパターン (定在波状) を与え, r_m はこのモードの振幅を示す。図11にモードパターン (P_{mk}) の一例として $N=4$ および 5 の場合を示す。(14)式を(5)式に代入し, 平均したものが一個の抵抗素子での平均的損失に対応し, これをすべての抵抗素子 ($k=1, \dots, N$) について加え合わせたものが平均ポテンシャル $U(r_1, r_2, \dots, r_N)$ である。すなわち

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{k=1}^N U_k = \sum_{k=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_k(v_k) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^N G_k(v_k) dt \\
 &= N \cdot \sqrt{\frac{g_1^3}{80g_5}} \left\{ \sum_{m=1}^N R_m - \frac{\beta}{8} \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N (2 - \delta_{ml}) g_{ml} R_m R_l \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{24} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N H_{klm} R_k R_l R_m \right\} \quad \text{ただし } R_k = r_k^2 \quad (16)
 \end{aligned}$$

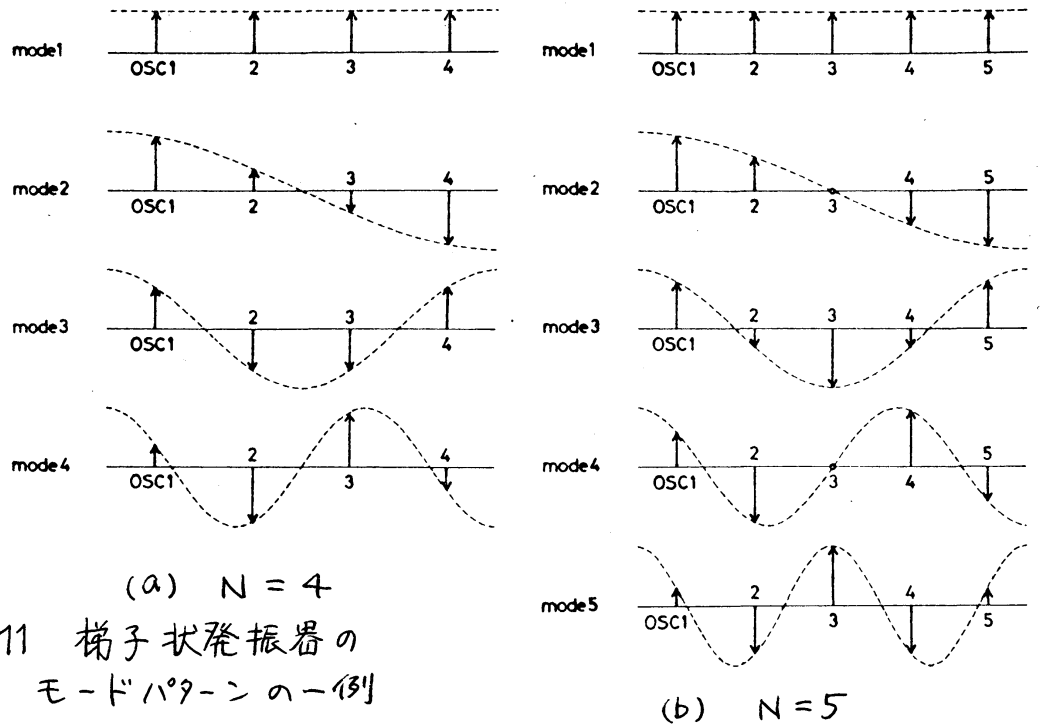


図11 梯子状発振器の
モードパターンの一例

係数 g_{ml} , H_{k2m} はモードパターン P_{mk} の値により決まる定数である。系の安定な振動は $R_k \geq 0$ の制約の下で \mathcal{U} の極小値として与えられる。この問題の解となるべき条件は 2.1 節 (I)~(IV) の条件として即ち述べた。この方法により求めた結果を以下に示す。

3.2 単一モード振動の安定性

安定な単一モード振動の振幅 R_m と安定条件 (パラメータ β の範囲) を以下に示す。

$$(a). \quad m = 1, 1 + \frac{N}{2}$$

$$R_m = \beta + \sqrt{\beta^2 - 8} \quad ; \quad \beta^2 > 8 \quad (17)$$

$$(b). \quad m = 1 + \frac{N}{3}$$

$$R_m = \frac{2}{3} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}) \quad ; \quad \beta^2 > 8 \quad (18)$$

$$(c). \quad m \neq 1, 1 + \frac{N}{2}, 1 + \frac{N}{3}, 1 + \frac{2}{3}N$$

$$R_m = \frac{3}{5} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 80/9}) \quad ; \quad \frac{80}{9} < \beta^2 < \frac{400}{29} \quad (19)$$

$$(d). \quad m = 1 + \frac{2}{3}N \quad \text{このモードのみ不安定となる。}$$

これらの結果は、以下のように説明できる。

(a) のモードでは、すべての非線形抵抗 (能動素子) ($k=1, \dots, N$) に対して $|P_{mk}| = 1$ が成立する。すなわち、すべての抵抗に加わる振幅は等しい。従って、その振幅が、一個の抵抗の平均ポテンシャルを極小とする値をとれば、系全体のポテンシャル \mathcal{U} も極小となり、このモードは単一モード振動とし

て安定となる。

これに対し、(b) $m = 1 + \frac{N}{3}$ のモードパターンは少し特殊となり、 $|P_{mk}| = 0$ or $\frac{\sqrt{6}}{3}$ となる。すなわち、無発振状態となる能動素子と、同一振幅で発振する能動素子とに分かれる。この発振状態の振幅が一個の素子の平均ポテンシャルを極小とする「自然な値」となれば、無発振状態も極小値を与えるから、系全体の平均ポテンシャルも極小となる。3次特性では無発振状態は極小値を与えないから、このモードは不安定であった。これらの(a),(b)は、すべての能動素子が極小値を取り「満足」するので、「自然な単一モード振動」と呼ぶことができよう。従って、これらの単一モード振動が安定となる β の範囲も、一個の素子の場合と完全に一致する。

(c) のタイプのモードは、一般にすべての素子に加わる振幅は異なるので、一部の素子にとって自然な発振振幅となっても他の素子にとっては大きすぎたり小さすぎたりする。従って3次特性の場合は不安定なモードであった。ところが5次特性では無発振状態も極小値を与える自然な値であるから、極小値に近い状態となる素子の数が多数となり、全体の平均ポテンシャルとしては極小値となり、モードは安定となる。すなわち(a),(b)が全素子が「満足」する「全員一致」型とすれば(c)は比較的多数の素子がほぼ「満足」する「多数決」型

の単一モード振動となる。

(d)のモードは、後述のように(b)のモード $1 + \frac{N}{3}$ と密接な関係を持ち、 $1 + \frac{N}{3}$ のモードに対する抑制条件が成立せず不安定となる。

3.3 2重モード振動の安定性

安定な等振幅2重モード振動は次のようになる。

$$(a') \quad p=1, \quad q=1+\frac{N}{2}$$

$$R_p=R_q=0.3(\beta+\sqrt{\beta^2-80/9}) \quad ; \quad \frac{80}{9} < \beta^2 < 16 \quad (20)$$

$$(b) \quad p=2, \dots, N, \quad q=\tilde{p} \equiv N+2-q \quad (p \neq 1+\frac{N}{2}, 1+\frac{N}{3}, 1+\frac{2}{3}N)$$

$$R_p=R_{\tilde{p}}=\frac{5}{14}(\beta+\sqrt{\beta^2-224/25}) \quad ; \quad \beta^2 > \frac{32}{3} \quad (21)$$

$$(c') \quad p=1+\frac{N}{5}, \quad q=1+\frac{3}{5}N$$

$$R_p=R_q=\frac{14}{55}(\beta+\sqrt{\beta^2-\frac{440}{49}}) \quad ; \quad \frac{440}{49} < \beta^2 < \frac{40}{3} \quad (22)$$

(a')の2重モード振動は、すべての能動素子に等振幅の2つの周波数成分が印加される場合に対応し、一個の素子が2重モード振動に対して極小値をとるようになり、全体の平均ポテンシャルも極小となる。これは「自然な2重モード振動」と呼ばよう。従って安定条件も(11)式において $n=2$ とおいたものに一致する。

これに対して、(b)の2つのモード p, \tilde{p} では、モードパターン P_{pm} の形から、すべての m に対して次の関係が成立する。

$$(P_{pm})^2 + (P_{\tilde{p}m})^2 = 2 \quad (23)$$

すなわち、各能動素子においてモード μ と $\bar{\mu}$ の振幅は、互に他を補い合う形になり、最大ピーク電圧はすべての素子でほぼ等しい。個々の素子での2つの周波数成分の割合は異なるので、すべての素子の平均ポテンシャルは極小とはなり得ないが、それらの和としては極小となる。これらの2重モード振動は3次特性の場合にも安定に生じたもので「相補的な2重モード振動」と呼べる。

(c) のモード μ 、 $\bar{\mu}$ も特殊なモードの組合わせであって、 $k = 5n - 2$ ($n = 1, \dots, \frac{N}{5}$) において μ 、 $\bar{\mu}$ の両モード共振幅ゼロとなる。それ以外の素子では μ と $\bar{\mu}$ の振幅は「相補的」な関係となる。すなわち、無発振状態をとる能動素子と相補的な2重モード振動となる素子の混在する2重モード振動である。

ところで、(b) の相補的な2重モード振動のうち、

$$\mu = 1 + \frac{N}{5}, \quad \bar{\mu} = 1 + \frac{2}{5}N$$

が除かれているが、実はこの2つのモードは振幅 $R_\mu, R_{\bar{\mu}}$ の等しくなり不等振幅2重モード振動として安定となる。例えば $\beta = 3.0$ のとき $R_\mu \doteq 0.67$, $R_{\bar{\mu}} \doteq 2.0$ となる。この振動が安定となる β の範囲は、数値的に求めると次のようになる。

$$\beta > 2.942 \quad (24)$$

これらのモードに対して次の関係が成り立つ。

$$k = 3j + 1, 3j + 3 \quad (j = 0, 1, \dots) \text{ のとき}$$

$$|P_{1+\frac{N}{3}k}| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad P_{1+\frac{2}{3}Nk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$k = 3j + 2$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$P_{1+\frac{N}{3}k} = 0, \quad P_{1+\frac{2}{3}Nk} = -\sqrt{2}$$

すなわち、単一モードの印加される素子 ($k = 3j + 2$) と、ほぼ等しい振幅 (R_p も $R_{\bar{p}}$ であることによって $P_{pk}^2 R_p = P_{\bar{p}k}^2 R_{\bar{p}}$ となる) の2重モードが印加される素子 ($k = 3j + 1, 3j + 3$) が混在する形で安定となる。この中、 \bar{p} が不等振幅2重モード振動となることは、モード $p = 1 + \frac{N}{3}$ が自然な単一モードとなること、 $\bar{p} = 1 + \frac{2}{3}N$ が単一モードとして不安定なことと互にかかわった現象である。

対称なシステムでは等振幅2重モード振動しか生じないと述べた文献もあるが^[8]、これは誤りである。また、この系で他に不等振幅2重モード振動が存在するかどうかは未解決の問題である。

3.4 負性抵抗の大きさと振動の関係

3重モード以上の多重モード振動については、平均ポテンシャルのすべての極小値を求める形で検討することは困難であるが、一個の5次特性素子でも多重モード振動が可能であるから、自由度 N の大きい系では適当なモードの組合わせで多重モード振動が生じることが考えられる。ここでは、3重モード振動の一例をあげる。

$N=7$ のとき

$$R_2 = R_4 = R_6 = \frac{22}{145} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1160/121} \right)$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = 0$$

安定範囲は数値計算の結果

$$3.096 < \beta < 4.064$$

である。この3重モード振動により各能動素子に加わる電圧を検討してみると、各々、2つの振動成分が他の1つよりかなり大きい、2重モード振動様の波形となっている。

以上詳しく述べて来た単一および多重モード振動の安定に生じる β の範囲を、図12にまとめて示した。一個の素子の性質を反映して、 $\beta = 3 \sim 4$ の付近で多種類の振動が出現し、最も硬発振らしい特性を見せる。 β が十分大きくなると、原点付近の微小部分が正抵抗であることを除いて軟発振特性（3次特性）に似てくるため、安定な振動も「自然な単一モード」と「相補的2重モード振動」に限られてくる。

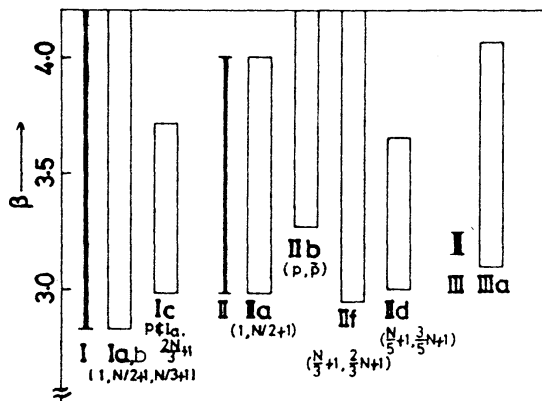


図1. 単一および多重モード振動の生じるパラメータ範囲

太線：ひとつの能動素子
長方形：梯子状発振器

I, II, III は各々 単一, 2重
および 3重モード振動を示す。

4. あとがき

本報告では、5次多項式で表わされる硬い発振特性をもつ非線形抵抗（能動素子）の性質について、平均ポテンシャルを用いて検討した。その結果、一個の素子でもパラメータの値により、任意の多重モード振動が生じ得ることを示した。この性質を用いて梯子状発振器を解析し、軟発振特性の素子を用いた場合に比べ、多くの単一モードや2重モード振動が生じ、さらに3重モード振動も生じ得ることを示した。

平均ポテンシャルを用いて得たこれらの結果の物理的意味について、やや詳しすぎるほどの説明を付け加えた。これは線形系の振動モードパターンと微小な非線形抵抗素子の性質がわかれば、損失の小さくなるような（すなわち安定な）モードの組合わせを見つけ出すことができることを示したかったためである。このような考え方は、平均ポテンシャルの極小点の見当を大まかにつけるのに有効であり、初見の多自由度発振器の振舞いを予想することを可能にする。

さらに複雑な特性をもつ抵抗素子がどのような性質を示すか、5次特性にみられなかった新しい性質があるか、といった問題は今後の課題である。

最後に、本研究を進める上でいろいろ御配慮頂いた京大西川禎一教授、上田暁亮助教授に感謝致します。

文 献

- [1] 例之ば, Minorsky, N.: "Nonlinear Oscillation,"
D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1962.
- [2] 倉光: 多自由度発振器における多重モード振動と相互同期現象, 京都大学数理解析研講究録 370 (1979.12).
- [3] 倉光, 高瀬: 平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法, 電子通信学会技術研究報告 NLP 79-38 (1980).
- [4] 倉光, 高瀬, 田所: 平均ポテンシャルを用いた格子状結合された発振器群の解析, 電子通信学会技術研究報告 NLP 80-2 (1980).
- [5] 倉光, 高瀬: 格子状結合された発振器群における多重モード振動 京都大学数理解析研講究録 413 (1981.1)
- [6] Kuramitsu, Takase: A New Approach for the Analysis of Multimode Oscillators Based on the Averaged Potential, IEEE ISCAS 1981.
- [7] Utkin, G.M.: The Conditions of Stability of Simultaneous Oscillations in Multiple-Tuned Oscillatory Systems, Radio Eng. Electron. Phys., vol.4, No.12, p.59, 1959.
- [8] 遠藤, 太田: 5次の非線形特性をもつ発振器の結合系, 電子通信学会技術研究報告 NLP 77-21 (1978)
- [9] 遠藤, 太田: 発振器の結合系における多重モード発振—5次の非線形特性を持つ場合, 電子通信学会論文誌 Vol. J61-A No.10, 964-971 (1978).
- [10] 倉光, 高瀬: 硬い発振特性をもつ多自由度発振器の平均ポテンシャルによる解析, 電子通信学会技術研究報告 NLP 81-13 (1981).